Mécanique analytique, Corrigé 9

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
nathan.brunet@epfl.ch
lorenzo.fioroni@epfl.ch
filippo.ferrari@epfl.ch
jonas.daverio@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
mathias.findrihan@epfl.ch
remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Transformation canonique

Montrer que la transformation

$$P = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right), \qquad Q = \arctan\left(\frac{q}{p}\right) \tag{1}$$

est canonique.

Pour une transformation à une seule coordonnée généralisée, il suffit de vérifier que les nouvelles variables satisfont

$$\{Q, P\}_{q,p} = 1, \tag{2}$$

où le crochet de Poisson par rapport aux variables anciennes (q, p) est défini par

$$\{A, B\}_{q,p} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}. \tag{3}$$

Dérivées de P. On a

$$P = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial p} = p, \qquad \frac{\partial P}{\partial q} = q. \tag{4}$$

Dérivées de Q. Écrivons $Q = \arctan(u)$ avec $u = q/p$. Alors

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{1}{1+u^2}\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{1}{1+(q/p)^2}\cdot\frac{1}{p} = \frac{p}{p^2+q^2}, \tag{5}$$

et

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{1}{1+u^2}\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{1}{1+(q/p)^2}\cdot\left(-\frac{q}{p^2}\right) = -\frac{q}{p^2+q^2}. \tag{6}$$

Crochet de Poisson. Le crochet de Poisson $\{Q, P\}_{q,p}$ vaut alors

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \left(\frac{p}{p^2+q^2}\right)p - \left(-\frac{q}{p^2+q^2}\right)q. \tag{7}$$

On obtient

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{p^2}{p^2+q^2} + \frac{q^2}{p^2+q^2} = \frac{p^2+q^2}{p^2+q^2} = 1. \tag{8}$$

Ainsi $\{Q,P\}_{q,p}=1$. Dans un système à un degré de liberté, on a automatiquement $\{Q,Q\}_{q,p}=0$ et $\{P,P\}_{q,p}=0$, de sorte que la transformation $(q,p)\mapsto(Q,P)$ est canonique.

Exercice 2 : Utiliser les transformations canoniques

Cette fois on va utiliser les transformations canoniques pour simplifier un problème. Le hamiltonien est donné par :

$$H=\frac{p^2}{2m}\left(\frac{l}{q}\right)^2-\lambda q^2 \tag{9}$$

a) Les équation de Hamilton sont donc :

$$\begin{cases}\dot{p}=\dfrac{l^2}{m}\dfrac{p^2}{q^3}+2\lambda q\\ \dot{q}=\dfrac{l^2}{m}\dfrac{p}{q^2}\end{cases} \tag{10}$$

b) Les équation ci-dessus semblent difficiles à résoudre. On va essayer d'obtenir un système plus simple par des changements de coordonnées. La nouvelle impulsion est définie de sorte à ce que le terme cinétique soit canonique, càd :

$$T=\frac{P^2}{2m}=\frac{p^2}{2m}\left(\frac{l}{q}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad P=\frac{lp}{q} \tag{11}$$

c) Ensuite on aimerait trouver une fonction génératrice de type $F_2(q,P)$ qui définisse une telle transformation[1].

$$p=\frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q}=\frac{Pq}{l}\quad\Rightarrow\quad F_2(q,P)=\frac{Pq^2}{2l}+f(P)$$

$f(P)$ peut être fixé arbitrairement, un choix simple est $f(P)=0$.

d) Tout est à présent défini et on peut trouver la nouvelle coordonnée :

$$Q=\frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P}=\frac{q^2}{2l} \tag{12}$$

et le nouvel hamiltonien :

$$K(P,Q)=\frac{P^2}{2m}-2\lambda Q. \tag{13}$$

e) Les équations de Hamilton deviennent :

$$\begin{cases}\dot{P}=\dfrac{2\lambda l}{m}\\ \dot{Q}=\dfrac{P}{m}\end{cases} \tag{14}$$

La première donne :

$$P(t)=2\lambda l\,(t-t_0) \tag{15}$$

1. Rien ne dépendant explicitement du temps on laisse tomber cette possibilité pour cet exercice ; n'étant pas nécessaire, une dépendance du temps n'apporterait rien.

où t_0 est la première constante à fixer par les conditions initiales.

On injecte cette solution dans la deuxième équation et on trouve :

$$Q(t) = \frac{\lambda l}{m}(t - t_0)^2 + Q_0 \tag{16}$$

avec Q_0 la deuxième constante.

f) Il reste à présent à inverser les expressions pour les coordonnées :

$$\begin{cases} q(t) = \pm\sqrt{2\,l\,Q(t)} = \pm\sqrt{\dfrac{2\lambda l^2}{m}(t-t_0)^2 + 2lQ_0}, \\ p(t) = P(t)\,\dfrac{q(t)}{l} = \pm 2\lambda(t-t_0)\,\sqrt{\dfrac{2\lambda l^2}{m}(t-t_0)^2 + 2lQ_0}. \end{cases} \tag{17}$$

Pour vérifier nos calculs, nous pouvons injecter ces solutions dans les équations de Hamilton trouvées au début, qui sont effectivement satisfaites.

Exercice 3 : Parachutiste et hélicoptère

a) Le hamiltonien est simplement donné par :

$$H(p, q, t) = \frac{p^2}{2m} + mgq \tag{18}$$

b) On veut changer de référentiel, les nouvelles coordonnées deviennent donc :

$$\begin{cases} Q(p, q, t) = q - h(t) \\ P(p, q, t) = p - m\dot{h}(t) \end{cases} \tag{19}$$

c) On se trouve dans un référentiel accéléré en une dimension. Ceci va conduire à un "g effectif" donné par $g + \ddot{h}$. Les équations du mouvement spéculées sont donc :

$$\begin{cases} \dot{P} = -m\big[g + \ddot{h}(t)\big] \\ \dot{Q} = \dfrac{P}{m} \end{cases} \tag{20}$$

d) En utilisant la définition de $F_2(P, q, t)$ on a :

$$Q = \frac{\partial F_2(P, q, t)}{\partial P} = q - h(t) \tag{21}$$

et donc :

$$F_2(P, q, t) = P\big[q - h(t)\big] + f(q, t) \tag{22}$$

On doit également imposer :

$$p = \frac{\partial F_2(P, q, t)}{\partial q} = P + \frac{\partial f(q, t)}{\partial q} \tag{23}$$

et donc :

$$f(q,t) = m\dot{h}(t)\,q + \tilde{f}(t) \tag{24}$$

On a donc défini :

$$F_2(P,q,t) = P\big[q - h(t)\big] + m\dot{h}(t)\,q + \tilde{f}(t) \tag{25}$$

Puisque l'on a trouvé une fonction génératrice qui engendre la transformation, elle est canonique par construction.

e) Le nouvel hamiltonien est donné par :

$$K(P,Q,t) = H(p(P,Q,t),\, q(P,Q,t),\, t) + \left.\frac{\partial F_2(P,q,t)}{\partial t}\right|_{q=q(P,Q,t)} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\big[P + m\dot{h}(t)\big]^2}{2m} + mg\big[Q + h(t)\big] - P\dot{h}(t) + m\dot{h}(t)\big[Q + h(t)\big] + \dot{\tilde{f}}(t) \\ &= \frac{P^2}{2m} + m\big[g + \ddot{h}(t)\big]Q + \underbrace{\tfrac{1}{2}m\dot{h}(t)^2 + m\big[g + \ddot{h}(t)\big]h(t) + \dot{\tilde{f}}(t)}_{\text{indépendants de } P \text{ et } Q} \end{aligned} \tag{39}$$

Les équations du mouvement obtenues sont bien celles attendues :

$$\begin{cases} \dot{P} = -m\big[g + \ddot{h}(t)\big] \\ \dot{Q} = \dfrac{P}{m} \end{cases} \tag{40}$$